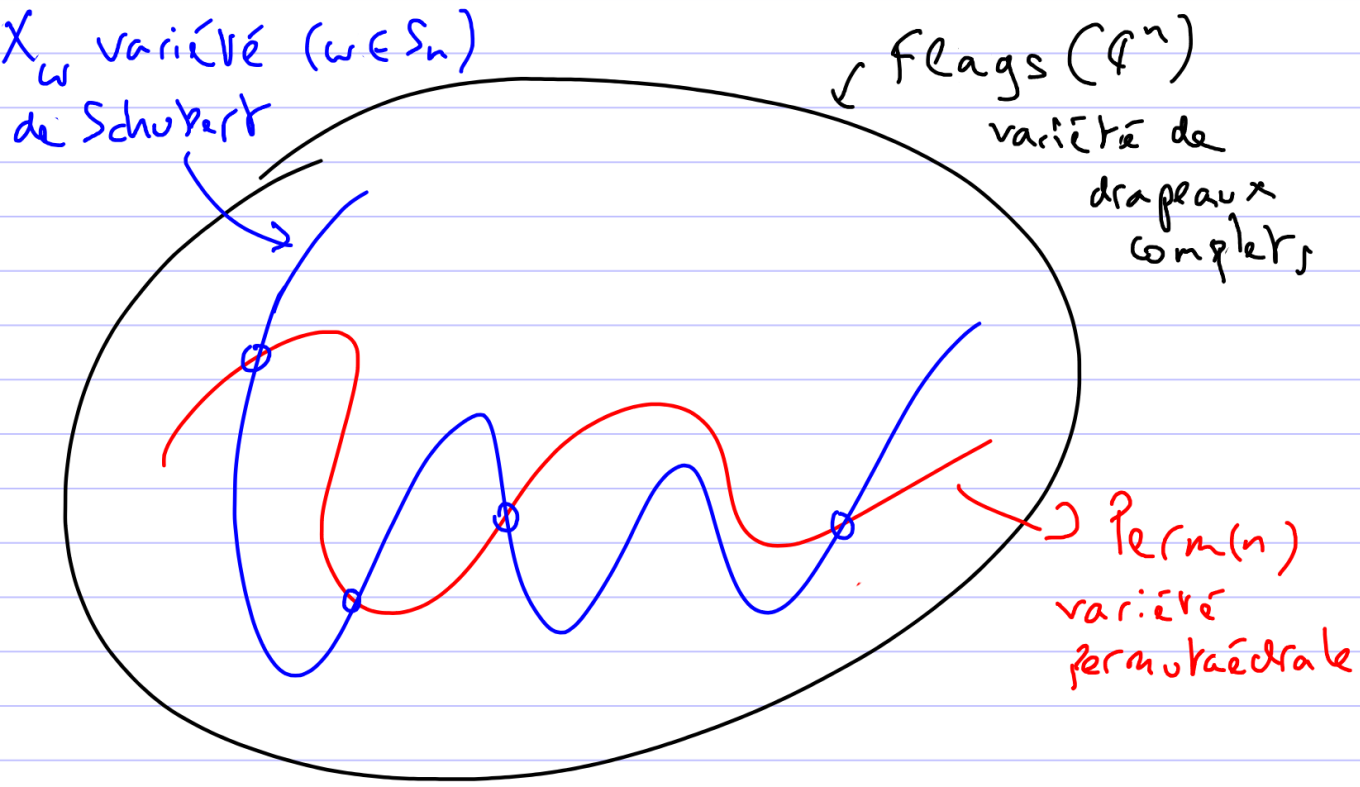
ALGORITHMES DE PARKING
POLYNÔMES QUASISYMÉTRIQUES
~~CALCUL DE SCHUBERT~~

PHILIPPE NADEAU (CNRS / Lyon 1)

Collaboration avec VASU TEWARI (Université de Hawaï)

1ères RENCONTRES ANR COMBINÉ 8/9 février 2022

MOTIVATION



On veut calculer $\boxed{a_w := \# \, \mathrm{Perm}(n) \cap X_w}$

Théorie classique (cohomologie) $\Rightarrow$ $\boxed{a_w = \langle \sigma_w \rangle}$

polynôme de Schubert $\in \mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$

$\langle \cdot \rangle$ = forme linéaire sur "

EXPOSÉ = INTERPRÉTATION COMBINATOIRE

ALGORITHMES DE PARKING

- $\mathbb{Z}$ identifié à l'ensemble des places de parking.
- r voitures $1, 2, \dots, r$ arrivent dans cet ordre
- la voiture i souhaite se garer en $v_i \in \mathbb{Z}$

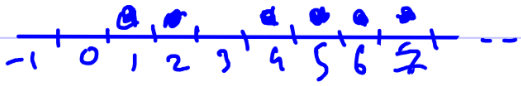
ENTRÉE : $v_1 v_2 \dots v_r$

SORTIE : $I \subseteq \mathbb{Z}$, $\#I = r$ ← ensemble des places occupées

ALGO CLASSIQUE : on suppose $1, \dots, k$ déjà garées. La voiture $k+1$ arrive avec souhait v_{k+1}.

- Si v_{k+1} est libre, $k+1$ se gare.
- Sinon, elle se gare à la première place disponible sur la droite de v_{k+1}.

Ex : $v = 141544$



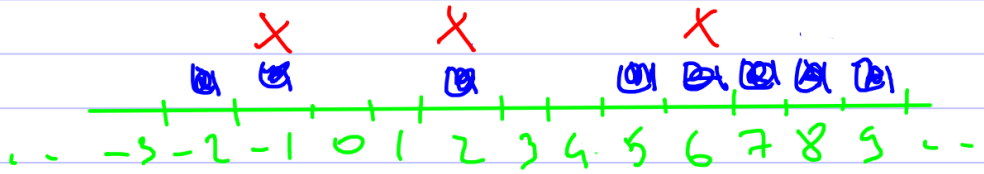
DÉF $v_1 v_2 \dots v_r$ est un "mot de parking" si en sortie $\{\text{Places occupées}\} = \{1, 2, \dots, r\}$

- Omniprésentes en combinatoire énumérative / algébrique.
- $\#\{\text{mots de parking de taille } r\} = (r+1)^{r-1}$
- Caractérisation : $v_1 v_2 \dots v_r$ parking

$$\iff \forall k \leq r, \ \#\{j \mid v_j \leq k\} \geq k$$

Coxeter Sylvester (on cherche un meilleur nom)

ALGO CS : Après que 1, .., k sont garées, chaque intervalle a une place marquée X,

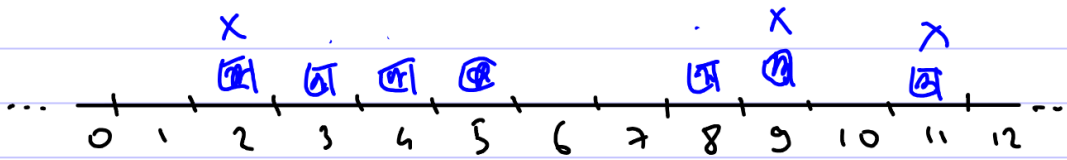


Algo CS

- k+1 se gare en N_{k+1} si la place est libre.
- Sinon, $N_{k+1} \in [\![a,b]\!]$ intervalle max de places occupées avec marque $M \in [\![a,b]\!]$.
  - si $N_{k+1} < M$, k+1 se gare en $a-1$
  - si $N_{k+1} \geq M$, k+1 se gare en $b+1$
- Enfin, la nouvelle marque de l'intervalle où k+1 est garée est $m' = N_{k+1}$.

Exemple : 5.11.8.3.9.3.2

(en live)



DÉF : $N_1 N_2 \dots N_r$ est un mot de CS-parking si à la fin, les places occupées sont $\{1, 2, \dots, r\}$

CSPARK(r) := {mots de CS-parking de longueur r}

Ex (r=3)

111	112	113	121	122	123	131	132	133
211	212	213	221	222	223	231	232	233
311	312	313	321	322	323	331	332	333

PARENTHÈSE :

Ces idées se généralisent à des procédures du type "Parking local" :
- on se gare à droite ou à gauche de l'intervalle.
- la décision "ne dépend que de l'intervalle".

MÉTA THÉORÈME

Les fonctions de parking pour tout "algo local" sont comptées par $(n+1)^{n-1}$

- La preuve "cyclique" de Pollak s'étend.
- Probabilisation possible
- Extension à $N_i \in \mathbb{Z} \times \{\text{Extra info}\}$

FIN PARENTHÈSE

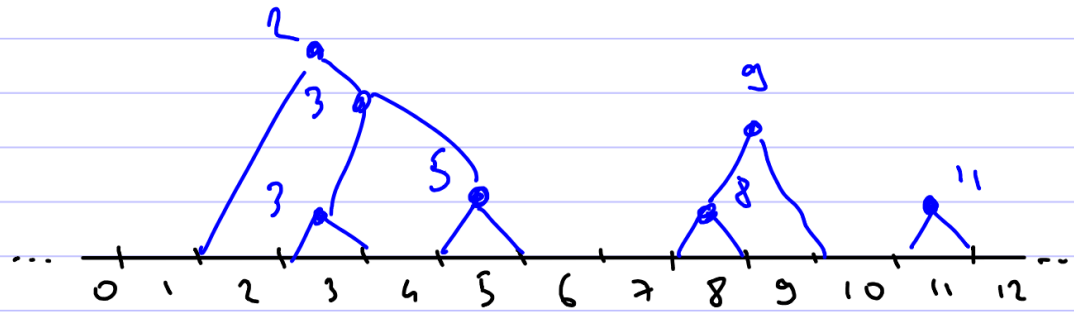
DU CS-PARKING à la CS-CORRESPONDANCE

IDÉE : On enregistre l'"histoire" de la procédure de parking.

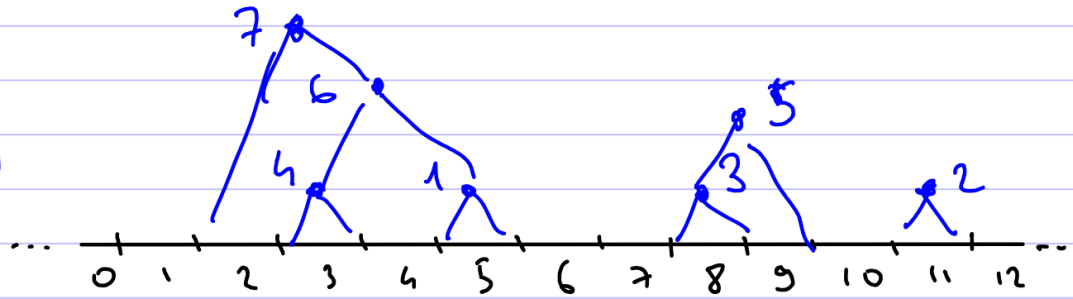
EXEMPLE : $\underline{v} = 5.11.8.3.9.3.2$ (le même qu'avant)

(en live)

$P(\underline{v})$



$Q(\underline{v})$



THÉORÈME [N-Tewari '21+]

$\underline{v} \mapsto (P(\underline{v}), Q(\underline{v}))$ est une bijection

Mots $v_1 v_2 \dots v_r$ $(v_i \in \mathbb{Z})$ $\longleftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Couples } (P, Q) \text{ de même forme (forêt),} \\ P \text{ forêt binaire de recherche locale } (*) \\ Q \text{ " " décroissante.} \end{array} \right\}$

(*) 

pour tout noeud interne.

FAIT : l'insertion se projette sur le CS-parking

$\Rightarrow$ $\boxed{\underline{a} \in \mathrm{CSPARK}(r) \text{ ssi } P(\underline{a}) \text{ a support } \{1, \dots, r\}}$

DÉF : $\underline{v} \equiv_{CS} \underline{w}$ si $P(\underline{v}) = P(\underline{w})$

$\Rightarrow$ $\{\text{Classes d'équivalence } \mathcal{C}\} \xleftrightarrow{1:1} \langle P\text{-symboles} \rangle$

$\{\underline{v} \in \mathcal{C} = \mathcal{C}(P) \text{ fixée}\} \xleftrightarrow{1:1} \langle Q\text{-symboles de m̂ forme que } P \rangle$

$\boxed{\text{SLIDE POLYNOMIALS}}$

Soit $\underline{v} = v_1 \dots v_r$,

$$F(\underline{v}) := \sum_{b_1 \dots b_r} x_{b_1} x_{b_2} \dots x_{b_r} \in \mathbb{Q}^{r}[x_1, x_2, \dots]$$

degré total

"$\underline{v}$-compatible" $\rightarrow$ $\begin{cases} 1 \leq b_i \leq v_i \\ b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \\ v_i > v_{i+1} \Rightarrow b_i > b_{i+1} \end{cases}$

Forment nos <u>briques de base</u> : on sait que les $F(\underline{v})$ (distincts, $\neq 0$) forment une base de $\mathbb{Q}^{r}[x_1, x_2, \dots]$.

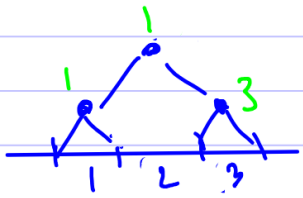
$\boxed{\text{FOREST POLYNOMIALS}}$

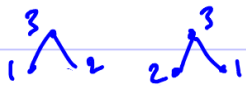
Pour un P-symbole P ($\Leftrightarrow$ une classe $\mathcal{C}$ de $\equiv_{CS}$ équivalence)

$$B(P) := \sum_{P(\underline{v}) = P} F(\underline{v}) = \sum_{\underline{v} \in \mathcal{C}} F(\underline{v})$$

Proposition : Si P_1, P_2 ont même forme f, $B(P_1) = B(P_2)$

$\rightarrow$ On note B_f ce polynôme.

Exemple : $P =$ 



$\rightarrow \mathcal{C} = \{131, 311\}$

$$B(P) = F(131) + F(313)$$

$$= 0 + (x_3 x_1^2 + x_2 x_1^2)$$

LA DÉCOMPOSITION ABB

DÉF $R \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ est dit quasisymétrique si

$\forall m \leq n$, $\forall a_1, \dots, a_m$ avec $a_i > 0$, le coefficient de $x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_m}^{a_m}$ est le même pour tous $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$

Ex: $x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$

- Les polynômes R quasisymétriques t.q. $R(0) = 0$ engendrent un idéal $Qsym_n^+ \subseteq \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$
- On note Cat_n l'ensemble des suites $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{N}^n$ telles que $\sum_{i=1}^{k} c_{n+1-i} \leq k$ for $k = 1, \dots, n$.

THÉORÈME [Aval-Bergeron-Bergeron '04]

$$\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n] = \bigoplus_{c \in Cat_n} \mathbb{Q} x^c \oplus Qsym_n^+$$

- Restriction au degré $n-1$:

$$\mathbb{Q}^{n-1}[x_1, \dots, x_n] = \underset{\left(\bigoplus_{c \in Cat_n} \mathbb{Q} x^c\right) \cap \mathbb{Q}^{n-1}[x_1, \dots, x_n]}{\underset{\shortparallel}{U_n}} \oplus \underset{Qsym_n^+ \cap \mathbb{Q}^{n-1}[x_1, \dots, x_n]}{\underset{\shortparallel}{Z_n}}$$

DÉFINITION: La forme linéaire $\langle \cdot \rangle : \mathbb{Q}^{n-1}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{Q}$ est définie par

$$\begin{cases} \langle R \rangle = 0 & \text{si } R \in Z_n \\ \langle R \rangle = R(1, \dots, 1) & \text{si } R \in U_n \end{cases}$$

[Cette forme linéaire est la symétrisation divisée [Postnikov '09]

$$\langle R \rangle_n = \sum_{\sigma \in S_n} \frac{R(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})}{(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)}) \cdots (x_{\sigma(n-1)} - x_{\sigma(n)})}$$

C'est un théorème [N.-Tewari '19] que les deux défs coïncident]

THÉORÈME: [N.-Tewari '21+]

Soit f telle que $B_f \in \mathbb{Q}^{n-1}[x_1, \dots, x_n]$.

a) Si f a support $[\![1, n]\!]$, $B_f \in U_n$.

De plus $B_f(1, \dots, 1) = |\mathcal{C}|$, si $P(\mathcal{C})$ a forme f.

b) Sinon, $B_f \in Z_n$ (et donc $\langle B_f \rangle = 0$)

POLYNÔMES DE SCHUBERT

Soit $w \in S_n$ = Permutations $(\{1, \dots, n\})$

On note $\ell(w)$ le nombre d'inversions de w $= \#\{i < j \mid w(i) > w(j)\}$

- $\underline{i} = i_1 \dots i_{\ell(w)}$ est un mot réduit pour w $(\underline{i} \in \mathrm{Red}(w))$

si $w = s_{i_1} \cdots s_{i_{\ell(w)}}$ où $s_i = (i, i+1)$ ← transposition élémentaire

Ex: $w = (12)(35)(4)$

Alors $1343 \in \mathrm{Red}(w)$ car $w = s_1 s_3 s_4 s_3$

$= (12)(34)(45)(34)$

DÉF: $$\mathfrak{S}_w := \sum_{\underline{i} \in \mathrm{Red}(w)} F(\underline{i}) \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$$

(Note : pas la définition classique)

THÉORÈME [N – Tewari '21+] $w \in S_n$, $\ell(w) = n-1$

$$a_w = \#\left(\mathrm{Red}(w) \cap \mathrm{CSPark}(n-1)\right)$$

<u>Preuve</u> : $a_w = \langle \sigma_w \rangle$ (cf intro)

$$\sigma_w = \sum_{i \in \mathrm{Red}(w)} F(i) = \sum_{\substack{P = P(\mathcal{C}) \\ \mathcal{C} \subseteq \mathrm{Red}(w)}} B(P)$$

(car $\mathrm{Red}(w)$ stable pour $\equiv_{CS}$)

$$\to \langle \sigma_w \rangle = \sum_{\substack{P = P(\mathcal{C}) \\ \mathcal{C} \subseteq \mathrm{Red}(w) \\ P \text{ a support } \{1,\dots,n\}}} B(P)(1,\dots,1) = \sum_{\substack{\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Red}(w) \\ \mathcal{C} \subseteq \mathrm{CSPark}(n-1)}} |\mathcal{C}| \quad \square$$

<u>EXEMPLES</u> ⓐ $w = (12)(35)(4) \in S_5$, $\ell(w) = 4$.

$\mathrm{Red}(w) = \{ \boxed{1343, 3143, 3413, 3431} \Rightarrow \underline{a_w = 4}$
$1434, 4134, 4314, 4341 \}$

ⓑ w = élément de Coxeter, i.e ses mots réduits sont des permutations de $\{1,\dots,n-1\}$ $\Rightarrow$ $\underline{a_w = \mathrm{Red}(w)}$.

ⓒ $w \in S_n$ m-grassmannienne, $m \geq 1$, forme $\lambda \vdash n-1$

$\mathrm{Red}(w) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{Tableaux standards de forme } \lambda\} = \mathrm{Tab}(\lambda)$

$$\underline{a_w = \#\{T \in \mathrm{Tab}(\lambda) \mid T \text{ a } m-1 \text{ descentes}\}}$$

PROLONGÉMENTS

Combinatoire

- Étudier la correspondance + en détail.
- On sait $a_w > 0$ et $a_w = a_{w^{-1}}$ [N-Tewari '20]

  $\longrightarrow$ Comprendre en termes de CS-parking

Les polynômes $B_f(x_1, \dots, x_n)$

- Ils forment une base de $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots]$
- De plus $B_{f_1} B_{f_2} = \sum_g \underbrace{\square}_{\in \mathbb{N}} B_g$

[N. Tewari '24]

↳ Interprétation algébrique ? Géométrique ?

↳ Permettent de caractériser les "harmoniques de $QSym_n^+$"

MERCI DE VOTRE ATTENTION

LES VARIÉTÉS

① VARIÉTÉ DE DRAPEAUX

Soit Flags(n) la variété de drapeaux complets

DÉF $$\boxed{\mathrm{Flags}(n) = \{ \mathcal{F} = (F_\cdot) \mid F_0 = \langle 0 \rangle \subsetneq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_n = \mathbb{C}^n \}}$$

variété projective, lisse, de dimension $\binom{n}{2}$ sur $\mathbb{C}$.

② SOUS-VARIÉTÉS DE SCHUBERT

$\mathcal{G} = (G_i)_i \in \mathrm{Flags}(n)$ drapeau fixé ("de référence")

DÉF $w \in S_n$. La variété de Schubert $X_w(\mathcal{G})$ est

$$\boxed{X_w(\mathcal{G}) := \{ \mathcal{F} \in \mathrm{Flags}(n) \mid \dim(F_i \cap G_j) \geq \#\{k \leq i,\ w(k) \leq j\} \text{ pour tous } i,j \leq n \}}$$

On a $\dim X_w(\mathcal{G}) = \ell(w)$

$$= \#\{ i < j \mid w(i) > w(j) \}$$

EXEMPLES $X_e(\mathcal{G}) = \{\mathcal{G}\}$, $X_{w_0^n}(\mathcal{G}) = \mathrm{Flags}(n)$

identity

avec $w_0^n = n\,n{-}1 \ldots 2\,1$ plus long élément

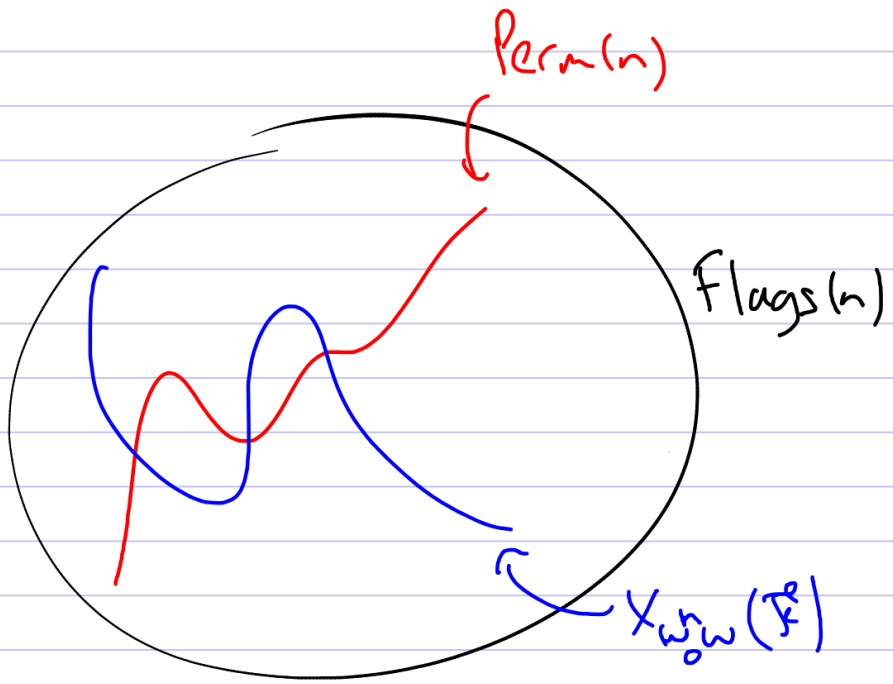
③ VARIÉTÉ PERMUTOÉDRALE

La variété permutoédrale $\mathrm{Perm}(n)$ est une variété lisse, torique qui peut être réalisée comme sous-variété de $\mathrm{Flags}(n)$: Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ 0 & & & \ddots \; n \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C})$

$$\boxed{\text{DEF} : \mathrm{Perm}(n) = \{ (F_i) \in \mathrm{Flags}(n) \;/\; D F_i \subseteq F_{i+1} \text{ pour } i = 1, \dots, n-1 \}}$$

$\dim \mathrm{Perm}(n) = n-1$.

- Clôture d'une orbite générique de $(\mathbb{C}^*)^n$.
- Cas particulier de variété de Hessenberg (semisimple)
- Éventail associé : arrangement de Coxeter de type A_{n-1}
- Polytope associé : le permutoèdre



LE PROBLÈME

Soient $\begin{cases} w \in S_n \text{ tq } \ell(w) = n-1. \\ \mathcal{F} \text{ drapeau "générique".} \end{cases}$

DEF $\boxed{a_w} = \#\left(\mathrm{Perm}(n) \cap X_{w_0 w}(\mathcal{F})\right)$ ne dépend pas de $\mathcal{F}$.
(et est $< +\infty$)

PROBLÈME : Règle "manifestement positive" de calcul de a_w ?

Motivation : a) Problèmes difficiles en général

- Problème majeur : $u, v, w \in S_n$
  $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ drapeaux génériques
  Déterminer $c_{u,v,w} = \#\left(X_u(\mathcal{F}) \cap X_v(\mathcal{G}) \cap X_w(\mathcal{H})\right)$

- Règle de Littlewood-Richardson

b) Intéressant pour la combinatoire nouvelle qui en découle

COHOMOLOGIE & INTERSECTION

THÉORIE (EXPRESS) V variété projective irréductible, lisse.

$H^*(V)$ = $\mathbb{Q}$-algèbre de cohomologie

$\deg : H^*(V) \to \mathbb{Q}$ forme linéaire.

Y sous-variété irréductible de $V \Rightarrow [Y] \in H^*(V)$

FAIT: $A, B \subseteq V$ t.q. $\left| \begin{array}{l} \dim A + \dim B = \dim V \\ A \text{ et } B \text{ sont « transverses ».} \end{array} \right.$

Alors $\#(A \cap B) = \deg([A] \cdot [B])$

APPLICATION: $V = \mathrm{Flags}(n) \supseteq A = X_{w_0 w}(\mathcal{F}^*)$, $B = \mathrm{Perm}(n)$

- $\mathcal{F}^*$ générique $\Rightarrow X_{w_0 w}(\mathcal{F}^*)$ et $\mathrm{Perm}(n)$ sont transverses. [Kleiman]
- $H^*(\mathrm{Flags}(n)) \overset{\varphi}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n] / \mathrm{Sym}_n^+$
- $\deg(P) = \left(\dfrac{1}{\prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) P(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \right) \Big|_{x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0}$

[Borel]

- $[X_{w_0 w}(\mathcal{F}^*)] \xrightarrow{\varphi}$ Polynôme de Schubert $\mathfrak{S}_w$ [Lascoux-Schützenberger]
- $[\mathrm{Perm}(n)] \xrightarrow{\varphi} \prod_{1 \le i < j \le n-1} (x_i - x_{j+1}) \bmod \mathrm{Sym}_n^+$ [Anderson-Tymoczko]